Копредставления коммутантов прямоугольных групп Артина и Коксетера

Федор Вылегжанин

НИУ ВШЭ, МГУ им. М.В.Ломоносова

Конференция “Алгебраическая топология, гиперболическая геометрия и компьютерный анализ данных”
в рамках совместного проекта ВШЭ и ТГУ
“Зеркальные Лаборатории”
(5-10 декабря 2023, Томск)

Граф-произведения групп

Пусть Γ – простой граф на m вершинах, $\underline{G}=(G_1,\ldots,G_m)$ – набор дискретных групп. Их граф-произведение – это

$$\underline{G}^\Gamma := (G_1*\cdots*G_m)\,/\,(h_ih_j=h_jh_i \text{ при } h_i\in G_i, h_j\in G_j, \{i,j\}\in\Gamma)\,.$$

Эта группа занимает промежуточное положение между свободным и прямым произведением:

$$G_1*\cdots*G_m \twoheadrightarrow \underline{G}^\Gamma, \qquad \underline{G}^\Gamma \xrightarrow{a}\!\!\!\!\!\rightarrow G_1\times\cdots\times G_m.$$

Группу $\mathrm{Cart}(\underline{G},\Gamma):=\mathrm{Ker}(a)\subset\underline{G}^\Gamma$ называют декартовой подгруппой граф-произведения.
(Если $G_1,\ldots,G_m$ абелевы, то a – абелизация, поэтому $\mathrm{Cart}(\underline{G},\Gamma)=\big(\underline{G}^\Gamma\big)'$ – коммутант.)

Прямоугольные группы Артина и Коксетера

Частные случаи конструкции граф-произведения:
прямоугольные группы Артина

$$\mathrm{RA}_\Gamma := \underline{\mathbb{Z}}^\Gamma = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i g_j = g_j g_i,\ \{i,j\} \in \Gamma \rangle$$

и прямоугольные группы Коксетера

$$\mathrm{RC}_\Gamma := \underline{\mathbb{Z}_2}^\Gamma = \langle g_1, \dots, g_m \mid g_i g_j = g_j g_i,\ \{i,j\} \in \Gamma;\ g_i^2 = 1 \rangle.$$

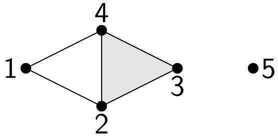
Некоторые прямоугольные конфигурации гиперплоскостей в $\mathbb{L}^n$ задают почти свободное действие $\mathrm{RC}_\Gamma \curvearrowright \mathbb{L}^n$.
Тогда (свободно действующие) подгруппы в RC_Γ являются фундаментальными группами гиперболических многообразий.

Основная тема доклада: экономные копредставления RC'_Γ.

Графы и симплициальные комплексы

Симплициальный комплекс без призрачных вершин $\mathcal{K}$ на множестве вершин V – это семейство подмножеств $I \subset V$ (*граней*), такое что

- Если $J \in \mathcal{K}$ и $I \subset J$, то $I \in \mathcal{K}$;
- $\{v\} \in \mathcal{K}$ для всех $v \in V$.



На рисунке слева, $\mathcal{K} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$.
Обычно $V = [m] = \{1, \dots, m\}$.
Каждому графу Γ соответствует кликовый комплекс

$$\mathcal{K}(\Gamma) = \{I \subset [m] : \ \{i,j\} \in \Gamma, \ \forall i,j \in I\}.$$

Полиэдральные произведения пространств

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$, $(\underline{X},\underline{A})=\{(X_i,A_i)\}_{i=1,\dots,m}$ – набор пар топологических пространств (т.е. $A_i\subset X_i$).
Соответствующее полиэдральное произведение – это пространство

$$(\underline{X},\underline{A})^{\mathcal{K}}:=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}\left(\prod_{i\in I}X_i\times\prod_{i\in[m]\setminus I}A_i\right).$$

Пример: $\mathcal{K}=\bullet\bullet$, $(\underline{X},\underline{A})^{\mathcal{K}}=X_1\times A_2\cup A_1\times X_2$. Ясно, что

$$\prod_{i=1}^m A_i\subset(\underline{X},\underline{A})^{\mathcal{K}}\subset\prod_{i=1}^m X_i.$$

Мы пишем $(X,A)^{\mathcal{K}}$, когда $X_1=\dots=X_m=X$, $A_1=\dots=A_m=A$.

Связь между $\underline{G}^\Gamma$ и $(\underline{X}, \underline{A})^\mathcal{K}$

Для дискретной группы G пусть $BG = K(G, 1)$ – её классифицирующее пространство, EG – его универсальное накрытие. Например, $B\mathbb{Z} = S^1$, $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$.

Теорема (Панов-Верёвкин'16; следствие из результатов Панова-Рэя-Фогта'04)

- $B(\underline{G}^\Gamma) = (B\underline{G}, \mathrm{pt})^{\mathcal{K}(\Gamma)}$;
- $B(\mathrm{Cart}(\underline{G}, \Gamma)) = (E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}(\Gamma)}$.

В частности: для $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\Gamma)$ имеем

- $B(\mathrm{RA}_\Gamma) = (S^1, \mathrm{pt})^\mathcal{K} \subset \mathbb{T}^m$;
- $B(\mathrm{RA}'_\Gamma) = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^\mathcal{K}$;
- $B(\mathrm{RC}_\Gamma) = (\mathbb{R}P^\infty, \mathrm{pt})^\mathcal{K}$;
- $B(\mathrm{RC}'_\Gamma) = ([-1, 1], \{\pm 1\})^\mathcal{K} =: \mathcal{R}_\mathcal{K} \subset [-1, 1]^m$ – вещественный момент-угол комплекс.

Следствие: гомологии декартовых подгрупп

Гомологии полиэдральных произведений вида $(C\underline{A},\underline{A})^{\mathcal{K}}$ известны (Bahri,Bendersky,Cohen,Gitler'08):

$$H_i((C\underline{A},\underline{A})^{\mathcal{K}};\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{i-1}(|\mathcal{K}_J| \wedge \bigwedge_{j\in J} A_j;\mathbb{Z}).$$

Так как $\mathrm{H}_i(G;\mathbb{Z}) \cong H_i(BG;\mathbb{Z})$, получаем:

$$\mathrm{H}_i(\mathrm{Cart}(\underline{G},\Gamma);\mathbb{Z}) = H_i((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}};\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{i-1}(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z})^{\oplus n_J},$$

где $n_J := \prod_{j\in J}(|G_j|-1)$. В частности,

$$\boxed{\mathrm{H}_i(RC'_\Gamma;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{i-1}(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z}).}$$

Копредставление RC'_Γ по Рейдемейстеру–Шрайеру

Алгоритм Рейдемейстера–Шрайера $\rightsquigarrow$ группу RC'_Γ можно задать следующим набором образующих и соотношений:

- $J \subset [m]$, $j \in J$, $j \neq \max(J)$ $\rightsquigarrow$ образующая

  $$\boxed{\gamma(J,j) := (g_{j_1}\cdot\ldots\cdot g_{j_k})\cdot g_{j_s}^{-1}\cdot(g_{j_1}\cdot\ldots\cdot\widehat{g}_{j_s}\cdot\ldots\cdot g_{j_k})^{-1}} \in \mathrm{RC}'_\Gamma,$$

  где $J=\{j_1<\cdots<j_k\}$, $j=j_s$;
- $J\subset[m]$, $\{j_s,j_t\}\in\Gamma$ $\rightsquigarrow$ соотношение

  $$\boxed{\gamma(J,j_s)\cdot\gamma(J\setminus j_s,j_t)=\gamma(J,j_t)\cdot\gamma(J\setminus j_t,j_s),}$$

  где формально полагаем $\gamma(A,\max(A)) := 1$.

Итого $\sum_{J\subset[m]}(|J|-1)$ образующих и $\sum_{J\subset[m]}|\mathrm{E}(\Gamma_J)|$ соотношений. Хотим уменьшить эти числа.

Ранг и дефект

Для любой дискретной группы G определим её ранг

$$\operatorname{rank} G := \min_{G=\langle X|R\rangle} |X|$$

и дефект

$$\operatorname{def} G := \min_{G=\langle X|R\rangle} (|R| - |X|).$$

Например, $\operatorname{rank}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5) = 2$, $\operatorname{def}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_5) = 0$.
Теорема Грушко: $\operatorname{rank}(G * H) = \operatorname{rank} G + \operatorname{rank} H$. Ясно, что $\operatorname{rank} G \geq \operatorname{rank} G_{\mathrm{ab}}$, $\operatorname{rank} \mathbb{Z}^N = N$.

Ранг группы RC'_Γ

Для топологического пространства X обозначим
$\widetilde{b}_0(X) := b_0(X) - 1 = \dim_{\mathbb{Q}} \widetilde{H}_0(X;\mathbb{Q}) = \operatorname{rank} \widetilde{H}_0(X;\mathbb{Z})$.

Теорема (Панов, Верёвкин'16)

$\operatorname{rank} \mathrm{RC}'_\Gamma = \sum_{J\subset[m]} \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J) =: N(\Gamma)$.

- Нижняя оценка: $\operatorname{rank} \mathrm{RC}'_\Gamma \geq \operatorname{rank} (\mathrm{RC}'_\Gamma)_{\mathrm{ab}}$, но $(\mathrm{RC}'_\Gamma)_{\mathrm{ab}} = \mathrm{H}_1(\mathrm{RC}'_\Gamma;\mathbb{Z}) = H_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}};\mathbb{Z}) = \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{N(\Gamma)}$.
- Верхняя оценка: явно указан набор из $N(\Gamma)$ элементов, порождающих RC'_Γ. А именно: для каждого $J = \{j_1 < \dots < j_k\} \subset [m]$ рассмотрим элементы

$$\delta(J, j_s) := (g_{j_1}, \dots, (\widehat{g}_{j_s}, \dots (g_{j_{k-1}}, (g_{j_k}, g_{j_s}))\dots)\dots) \in \mathrm{RC}'_\Gamma.$$

Нужно выбрать по вершине j_s из каждой компоненты связности комплекса $\mathcal{K}_J$, не содержащей j_k.

Ранг декартовой подгруппы $C = \mathrm{Cart}(\underline{G},\Gamma) \subset \underline{G}^\Gamma$

Обозначим $n_j := |G_j| - 1$, $n_J := \prod_{j\in J} n_j$.

Теорема (Панов, Верёвкин'19)

$\mathrm{rank}\, C = \sum_{J\subset[m]} n_J \cdot \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$.

- Нижняя оценка: $\mathrm{rank}\, C \geq \mathrm{rank}\, C_{\mathrm{ab}}$, но $C_{\mathrm{ab}} = \mathrm{H}_1(C;\mathbb{Z}) = H_1((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}};\mathbb{Z}) = \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z})^{\oplus n_J}$.
- Верхняя оценка: явно указан набор порождающих для C. Для $J = \{j_1 < \dots < j_k\} \subset [m]$ и набора элементов $\underline{h} = (h_j : j \in J)$, $h_j \in G_j \setminus \{1\}$, рассм. элемент

$$\delta(J, j_s, \underline{h}) := (h_{j_1}, \dots, (\widehat{h_{j_s}}, \dots (h_{j_{k-1}}, (h_{j_k}, h_{j_s}))\dots)\dots) \in C.$$

Нужно выбрать по вершине j_s из каждой компоненты связности комплекса $\mathcal{K}_J$, не содержащей j_k.

Известные результаты про соотношения

Теорема (Панов, Верёвкин'19)

Следующие условия эквивалентны:

- RC'_Γ – свободная группа.
- $\mathrm{Cart}(\underline{G}, \Gamma)$ – свободная группа (в случае $G_i \neq \{1\}, \forall i$).
- Γ – хордовый граф.

Теорема (Грбич, Ильясова, Панов, Симмонс'22)

Следующие условия эквивалентны:

- RC'_Γ – группа с одним соотношением.
- RC'_Γ – группа поверхности рода $g = (m-4)2^{m-3} + 1$.
- $\mathcal{K}(\Gamma) = C_m$ или $C_m * \Delta$, где C_m – простой m-цикл, $m \geq 4$.

Немного обозначений

Пусть $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$ – разбиение пространства X на компоненты линейной связности. Обозначим

$$\Pi_1(X) := \mathop{\ast}_{\alpha} \pi_1(X_\alpha), \quad p(X) := \sum_{\alpha} \operatorname{rank} \pi_1(X_\alpha).$$

По теореме Грушко, $p(X) = \operatorname{rank} \Pi_1(X)$. Заметим, что $\Pi_1(X)_{\mathrm{ab}} = H_1(X; \mathbb{Z})$, так что $p(X) \geq \operatorname{rank} H_1(X; \mathbb{Z}) \geq b_1(X)$. Пример, когда все три числа различны: если X связно, $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, то $H_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_6$. Тогда

$$\operatorname{rank} \Pi_1(X) = 2, \quad \operatorname{rank} \Pi_1(X)_{\mathrm{ab}} = 1, \quad b_1(X) = 0.$$

Число образующих и соотношений в RC'_Γ

Напомним, что $\mathrm{H}_1(\mathrm{RC}'_\Gamma;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}^{N(\Gamma)}$, $N(\Gamma)=\sum_{J\subset[m]}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$.

Утверждение

Пусть RC'_Γ задана N образующими и M соотношениями. Тогда $N\geq N(\Gamma)$ и $M\geq\operatorname{rank}\left(\bigoplus_{J\subset[m]}H_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z})\right)$.

Вытекает из следующего факта (Epstein'61): если группа G задана N образующими и M соотношениями, то
$N\geq\operatorname{rank}\mathrm{H}_1(G;\mathbb{Z})$ и $M-N\geq\operatorname{rank}\mathrm{H}_2(G;\mathbb{Z})-\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{H}_1(G;\mathbb{Q})$.

Теорема (В.)

RC'_Γ можно задать $N(\Gamma)$ образующими и $\sum_{J\subset[m]}p(\mathcal{K}_J)$ соотношениями.

Зазор между оценками

Получаем:

$$\operatorname{rank}\left(\bigoplus_{J\subset[m]} H_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z})\right) \leq \operatorname{def}\mathrm{RC}'_\Gamma + N(\Gamma) \leq \sum_{J\subset[m]} p(\mathcal{K}_J).$$

Если обозначить $\Pi := *_{J\subset[m]}\Pi_1(\mathcal{K}_J)$, то

$$\operatorname{rank}\Pi_{\mathrm{ab}} \leq \operatorname{def}\mathrm{RC}'_\Gamma + N(\Gamma) \leq \operatorname{rank}\Pi.$$

Поэтому: если $\operatorname{rank}\Pi = \operatorname{rank}\Pi_{\mathrm{ab}}$, то мы знаем дефект RC'_Γ. (Это верно, например, если все группы $\pi_1(\mathcal{K}_J)$ свободны).

Пример: пусть $\mathcal{K}(\Gamma)$ – триангуляция S^2. Из двойственности Александера, $\operatorname{def}\mathrm{RC}'_\Gamma = 0$ – согласуется с тем, что $\mathrm{RC}'_\Gamma = \pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$, $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ – асферичное трёхмерное многообразие.

Число образующих и соотношений в $\mathsf{Cart}(\underline{G},\Gamma)$

Утверждение

Пусть $\mathsf{Cart}(\underline{G},\Gamma)$ задана N образующими и M соотношениями. Тогда $N \geq \sum_{J\subset[m]} n_J \cdot \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ и
$M \geq \operatorname{rank}\left(\bigoplus_{J\subset[m]} H_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z})^{\oplus n_J}\right)$.

Теорема (В.)

$\mathsf{Cart}(\underline{G},\Gamma)$ можно задать $\sum_{J\subset[m]} n_J \cdot \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ образующими и $\sum_{J\subset[m]} n_J \cdot p(\mathcal{K}_J)$ соотношениями.

Зазор между нижней и верхней оценкой на дефект равен $\operatorname{rank}\Pi - \operatorname{rank}\Pi_{\mathrm{ab}}$, где теперь $\Pi = \ast_{J\subset[m]}\Pi_1(\mathcal{K}_J)^{\ast n_J}$.

Явное описание образующих для RC'_Γ

Напомним, что
$\gamma(J, j_s) = (g_{j_1} \cdot \ldots \cdot g_{j_k}) \cdot g_{j_s}^{-1} \cdot (g_{j_1} \cdot \ldots \cdot \widehat{g}_{j_s} \cdot \ldots \cdot g_{j_k})^{-1} \in \mathrm{RC}'_\Gamma$,
$J = \{j_1 < \cdots < j_k\}$.
Например, $\gamma(\{1,2,5,7\},5) = g_1 g_2 g_5 g_7 \cdot g_5^{-1} \cdot (g_1 g_2 g_7)^{-1}$.
Назовём элемент $\gamma(J, j)$ хорошим, если в комплексе $\mathcal{K}_J$ верно:

- j – наименьшая вершина в своей компоненте связности;
- j и $\max(J)$ находятся в разных компонентах связности.

Предложение (Li Cai'20)

Хороших элементов ровно $\sum_{J \subset [m]} \dim \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$, и они порождают RC'_Γ.

Тождества $\gamma(J, j_s) \cdot \gamma(J \setminus j_s, j_t) = \gamma(J, j_t) \cdot \gamma(J \setminus j_t, j_s)$ для $\{j_s, j_t\} \in \Gamma$ позволяют выразить все $\gamma(J, j)$ через хорошие.

Явное описание соотношений в RC'_Γ

Утверждение

Пусть $(j_1, j_2, \ldots, j_N, j_{N+1} = i_1)$ – замкнутый цикл в $\mathcal{K}_J$. Тогда $(*)\prod_{t=1}^N \gamma(J \setminus j_{t+1}, j_t) \cdot \gamma(J \setminus j_t, j_{t+1})^{-1} = 1$.

Для каждого $J \subset [m]$ рассмотрим $p(\mathcal{K}_J)$ замкнутых путей по вершинам $\mathcal{K}_J$, которые порождают группу $\Pi_1(\mathcal{K}_J)$. Каждому из этих путей соответствует тождество вида (*). Выразив входящие в него $\gamma(I, i)$ через хорошие элементы, получим соотношение. Итого $\sum_{J\subset[m]} p(\mathcal{K}_J)$ соотношений.

Предложение (В.)

$\sum_{J\subset[m]} \dim \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ хороших элементов $\gamma(J, j)$, и $\sum_{J\subset[m]} p(\mathcal{K}_J)$ соотношений между ними, образуют копредставление группы RC'_Γ.

Пример: граница пятиугольника (Li Cai, 2020)

Пусть Γ – m-цикл, $m=5$. В группе RC'_Γ имеем $\sum_{J\subset[m]}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)=10$ хороших элементов

$\gamma(13{,}1)$, $\gamma(14{,}1)$, $\gamma(24{,}2)$, $\gamma(25{,}2)$, $\gamma(35{,}3)$, $\gamma(124{,}1)$, $\gamma(135{,}3)$, $\gamma(235{,}2)$, $\gamma(245{,}2)$

и единственное тождество

$$\gamma(1345{,}1)\gamma(2345{,}2)^{-1}\cdot\gamma(1245{,}2)\gamma(1345{,}3)^{-1}\cdot\gamma(1235{,}3)\gamma(1245{,}4)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\gamma(1234{,}4)\gamma(1235{,}5)^{-1}\cdot\gamma(2345{,}5)\gamma(1234{,}1)^{-1}{=}1.$$

Выражая $\gamma(J,j)$ через хорошие элементы, получаем

$$\gamma(235{,}2)\gamma(35{,}3)\gamma(25{,}2)^{-1}\gamma(245{,}2)\gamma(35{,}3)^{-1}\gamma(134{,}1)^{-1}\gamma(135{,}3)\gamma(14{,}1)\gamma(245{,}2)^{-1}\gamma(124{,}1)^{-1}$$

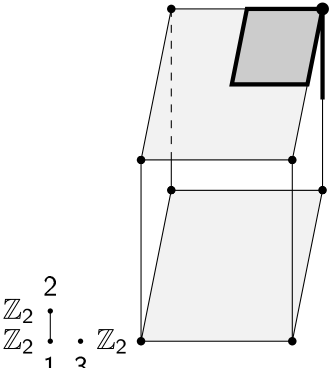
$$\cdot\gamma(25{,}2)\gamma(135{,}3)^{-1}\gamma(13{,}1)\gamma(235{,}2)^{-1}\gamma(13{,}1)\gamma(124{,}1)\gamma(24{,}2)\gamma(14{,}1)^{-1}\gamma(134{,}1)\gamma(24{,}2)^{-1}{=}1$$

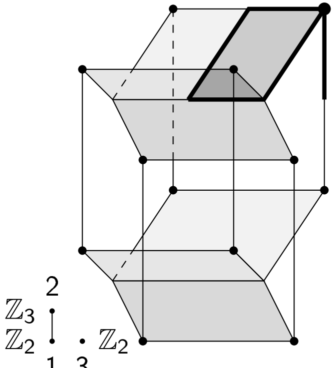
Заметим: $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ – сфера с $1+(m-4)2^{m-3}=5$ ручками. Поэтому заменой образующих можно привести соотношение к виду $(a_1,b_1)(a_2,b_2)(a_3,b_3)(a_4,b_4)(a_5,b_5)=1.$

Идея доказательства: склеивание $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ из кусочков

По определению, $\mathcal{R}_\mathcal{K} = ([-1,1],\{-1,1\})^\mathcal{K}$. Это пространство склеено из 2^m кусочков вида $([0,1],\{1\})^\mathcal{K}$. Это стягиваемые пространства, гомеоморфные $\mathrm{cone}(|\mathcal{K}|)$.

Аналогично, $(E\underline{G},\underline{G})^\mathcal{K}$ можно считать склеенным из $\prod_{i=1}^m |G_i|$ кусочков вида $([0,1],\{1\})^\mathcal{K}$.





Идея доказательства: склеивание $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ из кусочков

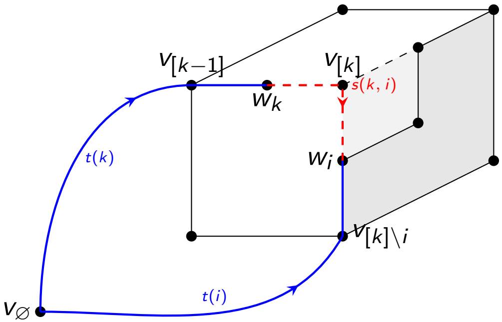
По определению, $\mathcal{R}_\mathcal{K} = ([-1,1], \{-1,1\})^\mathcal{K}$. Это пространство склеено из 2^m кусочков вида $([0,1], \{1\})^\mathcal{K}$. Это стягиваемые пространства, гомеоморфные $\mathrm{cone}(|\mathcal{K}|)$.
Аналогично, $(E\underline{G}, \underline{G})^\mathcal{K}$ можно считать склеенным из $\prod_{i=1}^m |G_i|$ кусочков вида $([0,1], \{1\})^\mathcal{K}$.

Если их приклеивать в "лексикографическом порядке", то J-ый будет приклеен по подпространству, гомотопически эквивалентному $|\mathcal{K}_J|$. Применяя теорему Ван Кампена, получаем: на этом шаге добавляется $\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z})$ образующих и $p(\mathcal{K}_J)$ соотношений.

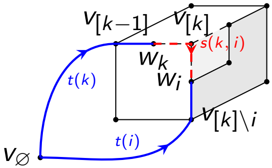
Итог: копредставление группы $\mathrm{RC}'_\Gamma = \pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$, в котором $\sum_{J\subset[m]} \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ образующих и $\sum_{J\subset[m]} p(\mathcal{K}_J)$ соотношений.

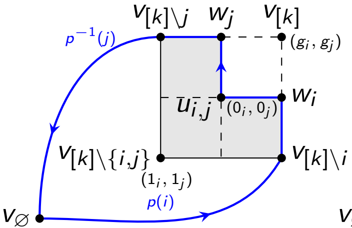
Наглядное описание образующих

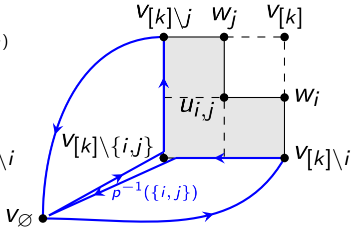
Каждому элементу группы RC_Γ можно сопоставить путь по пространству $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ (с точностью до гомотопии, неподвижной на концах): g_i – путь по ребру в i–ом направлении, композиции переходят в композиции. Замкнутые пути соответствуют словам, лежащим в RC'_Γ. Это наглядно объясняет изоморфизм $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) \cong \mathrm{RC}'_\Gamma$.



Наглядное описание соотношений







Список литературы

- V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Toric topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, Providence, RI (2015). arXiv:1210.2368
- Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера. Матем. сб., 207:11 (2016), 105-126. arXiv:1603.06902
- Taras Panov and Yakov Veryovkin. On the commutator subgroup of a right-angled Artin group. J. Algebra, 521 (2019), 284-298. arXiv:1702.00446
- J. Grbić, M. Ilyasova, T. Panov and G. Simmons. One-relator groups and algebras related to polyhedral products. Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, 152:1 (2022), 128-147. arXiv:2002.11476