Реализация гомеоморфизмов поверхностей алгебраически конечного типа диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой *

В. З. Гринес[1], *А. И. Морозов*[1 ✉], *О. В. Починка*[1]

[1]Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики
e-mail:aimorozov@hse.ru

В настоящей работе описана реализация каждого гомотопического класса типа T_2 диффеоморфизмом Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством. Такие диффеоморфизмы задают относительно простую динамику, так как, в силу работы А.Н. Безденежных и В.З. Гринеса [1,2], такие диффеоморфизмы имеют конечное число гетероклинических орбит.

Пусть $S_{g,k}$, $g \geq 0$, $k \geq 0$ – связная компактная ориентируемая поверхность рода g с краем, состоящим из k компонент связности. Положим $S_{g,0} = S_g$. Везде далее отображения поверхностей предполагаются сохраняющими ориентацию

Гомеоморфизм $h : S_g \to S_g$, $g \geq 1$ называется *приводимым* системой C непересекающихся между собой простых замкнутых кривых C_i, $i = 1, \ldots, l$, негомотопных нулю и попарно не гомотопных друг другу, если система кривых C инвариантна относительно h.

Приводимый непериодический гомеоморфизм $h : S_g \to S_g$, $g \geq 1$ называется *гомеоморфизмом алгебраически конечного типа*, если существует h-инвариантная окрестность $\mathbb{C}$ кривых множества C, состоящая из объединения двумерных колец и такая, что для каждой компоненты связности S_{g_j,k_j}, $j = 1, \ldots, n$ множества $S_g \setminus int\,\mathbb{C}$ существует число $m_j \in \mathbb{N}$ такое, что $h^{m_j}|_{S_{g_j,k_j}} : S_{g_j,k_j} \to S_{g_j,k_j}$ – периодический гомеоморфизм.

Пусть σ_i, σ_j — седловые точки диффеоморфизма f такие, что $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j} \neq \emptyset$. Напомним, что пересечение $W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ является счетным множеством и каждая точка этого множества называется *гетероклинической точкой*, а каждая орбита гетероклинической точки называется *гетероклинической орбитой*. Для любой гетероклинической точки $x \in W^s_{\sigma_i} \cap W^u_{\sigma_j}$ определим упорядоченную пару векторов $(\vec{v}^u_x, \vec{v}^s_x)$, где:

- $\vec{v}^u_x$ — касательный вектор к неустойчивому многообразию точки

*Работа выполнена при поддержке Международной Лабораторией Динамических Систем и Приложений, НИУ ВШЭ НН, грант Правительства Российской Федерации, номер контракта № 075-15-2019-1931

σ_j в точке x;

- $\vec{v}_x^s$ — касательный вектор к устойчивому многообразию точки σ_i в точке x.

Следуя [2] и [3, стр. 7], назовем гетероклиническое пересечение диффеоморфизма f *ориентируемым*, если упорядоченные пары векторов $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$ задают одинаковую ориентацию несущей поверхности S_g. В противном случае гетероклиническое пересечение назовем *неориентируемым.*

Теорема. В каждом гомотопическом классе $[h]$ гомеоморфизма $h : S_g \to S_g$, $g \geq 1$ алгебраически конечного типа существует диффеоморфизм Морса-Смейла $f : S_g \to S_g$ с ориентируемым гетероклиническим пересечением.

Список литературы

1. *Bezdenezhnykh, A. N.* Dissertation: Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with an orientable heteroclinic set on two-dimensional manifolds. // Gorky Order of the Red Flag of Labor State University. N.I. Lobachevsky. Gorky, (1985)
2. *Bezdenezhnykh A. N. and Grines V. Z.* Diffeomorphisms with orientable heteroclinic sets on two-dimensional manifolds. Methods of the quantitative theory of differential equations, // Gorkii State University, Gorkii. (1985), 139-152.
3. *Aranson S. Kh. and Grines V. Z.* Topological classification of cascades on closed two-dimensional manifolds // Advances in Mathematical Sciences. ? 1990. V. 45. 1 (271. pp. 3-32.)
4. *Smale S.* Diferentiable dynamical systems. // Bull. Amer. Math. Soc. 73(6), (1967), 747–817.